Travail - Puissance

1-Travail :

travail résistant — travail moteur

Le « travail » est la grandeur l'action d'une force qui déplace son point d'application .

Travail moteur, travail résistant

- ♦ si la force *favorise* le déplacement, le travail est dit *moteur*.
- ♦ si la force s'*oppose* au déplacement, le travail est dit *résistant*.

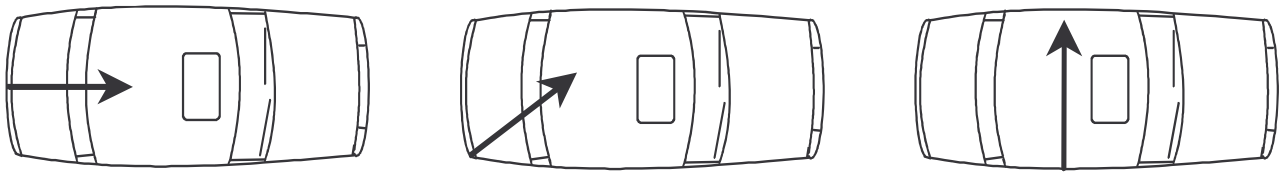
1.1-Travail d'une force constante le long d'une droite

On conçoit que le travail sera d'autant plus important que la force sera grande et le trajet long !

Le travail est donc défini par le produit de ces grandeurs. Mais on sait d'expérience qu'une force travaillera plus ou moins efficacement selon l'angle qu'elle fait avec le déplacement.

Exemple : *vouloir déplacer une automobile en panne*

Pour la faire avancer, il semble naturel de se placer derrière et de pousser dans le même sens que le déplacement. En poussant le véhicule de biais, il est plus difficile de le faire avancer. En poussant le véhicule de côté, il n'avance plus.



C'est le meilleur moyen — C'est déjà plus difficile — C'est impossible

a) Cas d'une force parallèle au déplacement

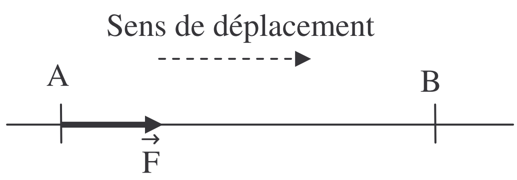
Le travail W d'une force constante qui déplace son point d'application ***sur sa droite d'action*** est égal au produit de l'intensité F de la force par la longueur ℓ du déplacement de A en B.

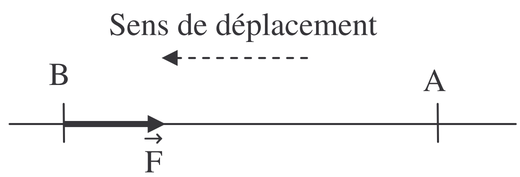
$$\mathbf{W = F.\,\ell}$$

Une force d'intensité 1 newton qui déplace son point d'application de 1 mètre le long de sa droite d'action fournit un travail de valeur 1 joule (J).

Si la force s'exerce dans le sens du déplacement le travail est *moteur* et compté positivement.

Si la force s'oppose au déplacement, le travail est *résistant* et compté négativement.

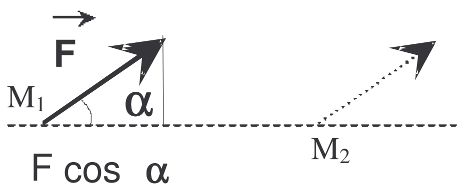




b) Cas d'une force oblique par rapport au déplacement

Si la force fait un angle α avec la trajectoire, seule la composante parallèle à la trajectoire effectue un travail.

$$\mathbf{W = F.\,\ell.\cos\alpha}$$



c) Définition

L'ensemble de ces relations correspond de fait au produit scalaire de la force par son déplacement.

$$W = \vec{F}.\vec{M_1M_2}$$

Où $\overrightarrow{M_1M_2}$ est le *vecteur déplacement* du point d'application de la force.

En effet, avec cette convention :

$0 < \alpha < \pi/2$: le travail, moteur, a une valeur positive,

$\alpha = \pi/2$: le travail est nul,

$\pi/2 < \alpha < \pi$: le travail, résistant, a une valeur négative.

Remarque : *Une force de frottement s'opposant toujours au déplacement, son travail sera toujours négatif. Par contre, le travail des forces dont l'action est réversible peut être soit positif, soit négatif.*

Exercice résolu

Énoncé :

Un livre est posé sur une table horizontale,; pour le faire glisser sur la table, il faut exercer une force horizontale de valeur 3N, et pour le soulever, une force verticale de valeur 5N. Calculer le travail à fournir pour :

(1) soulever le livre de 30cm, puis le remettre en place ;

(2) faire glisser le livre de 50cm, puis le remettre en place.

Solution :

(1)

Pour maintenir le livre en l'air, il faut exercer une force verticale dirigée vers le haut, que l'on soulève le livre ou qu'on le redescende.

Quand on soulève le livre, la force et le déplacement ont même direction et même sens :

$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = F\, M_1M_2 = 5 \times 0,3 = 1,5\ J.$ ***Le travail fourni est moteur.***

Quand on le repose, la force et le déplacement ont même direction mais sont de sens inverse :

$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = -F\, M_1M_2 = -5 \times 0,3 = -1,5\ J.$ ***Le travail à fournir est résistant.***

(2)

Quand on fait glisser le livre, la force exercée compense les frottements, qui s'opposent au mouvement du livre : elle est donc dans la même direction et le même sens que le déplacement :

$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = F\, M_1M_2 = 3 \times 0,5 = 1,5\ J.$ ***Le travail fourni est moteur.***

Quand on remet le livre en place en le faisant à nouveau glisser, le déplacement change de sens, mais la force à exercer aussi, puisque les frottements s'opposent toujours au déplacement du livre. :

$W = -\vec{F} \cdot \overrightarrow{M_2M_1} = F\, M_1M_2 = 5 \times 0,3 = 1,5\ J.$ ***Le travail fourni est encore moteur.***

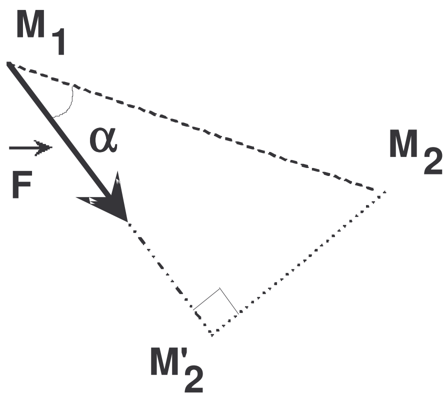
1.2-Travail d'une force constante sur un trajet quelconque

Soit une force constante dont le point d'application subit un déplacement rectiligne ℓ.

$$M_1\,M_2 = \ell$$

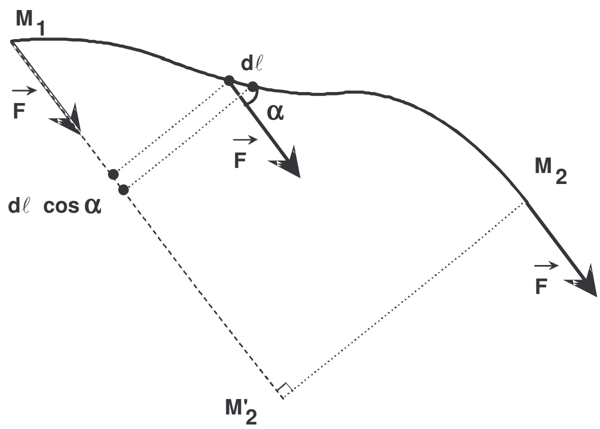
Le travail fourni par la force est :

$$W = F.\,\ell\,.\cos\alpha$$



Nous voyons sur la figure que $\ell.\cos\,\alpha$ est la projection du déplacement $M_1\ M_2$ sur la ligne d'action de la force.

$$\ell.\cos\alpha = M_1\,M'_2$$



Soit maintenant un déplacement curviligne $M_1\ M_2$. Découpons le en petits éléments $d\ell$ assez courts pour être considérés comme rectilignes. Le long d'un de ces déplacements élémentaires le travail de la force est :

$$dW = F.d\ell.\cos\alpha$$

Le travail total W fourni par la force de M_1 à M_2 est donc donné par la somme des travaux élémentaires, c'est-à-dire l'intégrale :

$$W = \int_{M_1}^{M_2} dW = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\vec{d\ell} = \int_{M_1}^{M_2} F.d\ell.\cos\alpha$$

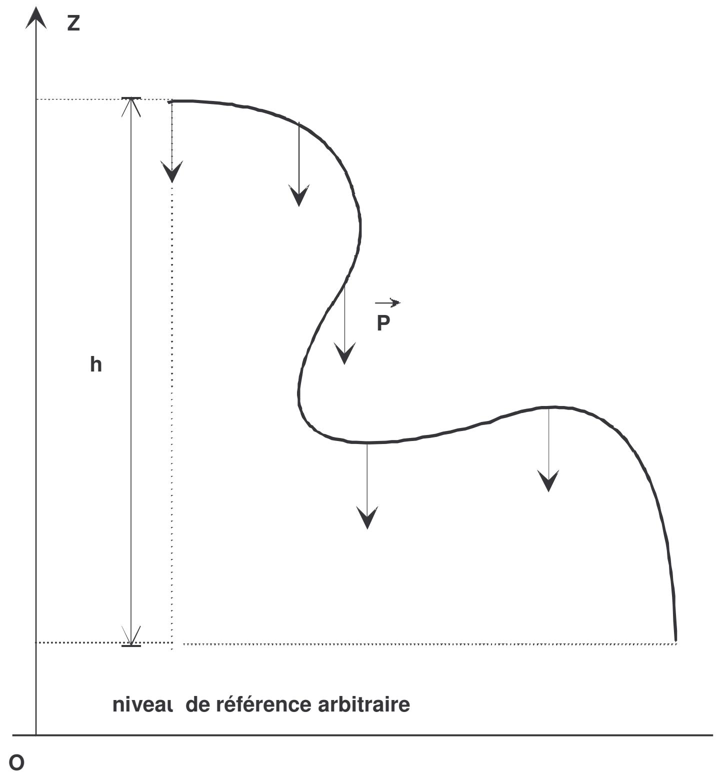
$$W = F\int_{M_1}^{M_2} \cos\alpha.d\ell = F.\overline{M_1M'_2}$$

car la somme des projections des déplacements élémentaires est égale à la projection (algébrique) $\overline{M_1\,M'_2}$ du trajet $M_1\ M_2$ sur la droite d'action de la force, quelle que soit la forme de ce trajet.

***Remarque** : ici la projection algébrique* $\overline{M_1\,M'_2}$ *est comptée positivement parce que la projection du vecteur* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *a le même sens que la droite d'action de la force* $\vec{F}$.

Règle : **le travail d'une force constante le long d'un trajet quelconque ne dépend que de la valeur de cette force et de la projection du trajet sur la droite d'action de cette force. Cette projection est une *mesure algébrique*.**

APPLICATION AU TRAVAIL D'UN POIDS DE VALEUR P LE LONG D'UN DEPLACEMENT GUIDE.



La projection du trajet sur la direction de la droite d'action du poids correspond à la dénivellation h.

Le travail du poids pourra donc s'exprimer par :

$W = \pm P\,h = \pm m\,g\,h$ **(+ si le poids descend, - si le poids est remonté)**

ou

$W = m\,g\,(z_{final} - z_{initial})$ **(z étant la côte des points de départ et d'arrivée, sur un axe vertical dirigé vers le haut)**

Remarque : *le travail du poids ne dépendant que des situations initiale et finale, on dit que le poids est une force conservative, contrairement aux forces de frottements dites dissipatives.*

Exercice résolu

Énoncé :

Comparer le travail du poids lorsque :

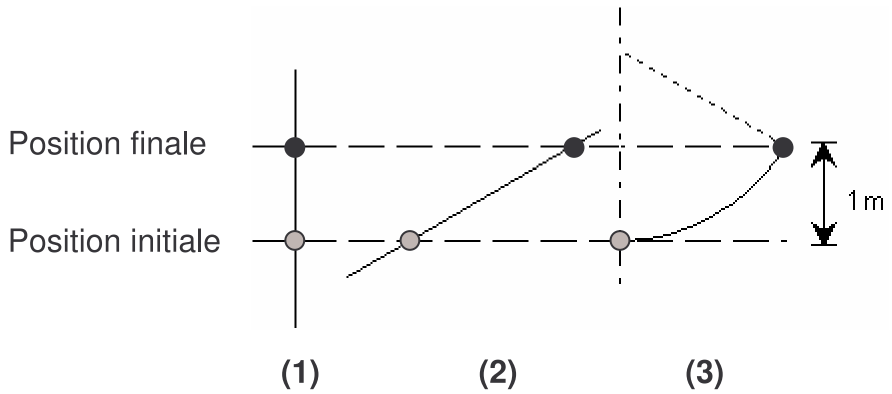
(1) on soulève de 1m un poids de 500Nà l'aide d'une corde et d'une poulie ;

(2) on le fait glisser vers le haut de 2 m, sur un plan incliné de 30° par rapport à l'horizontale ;

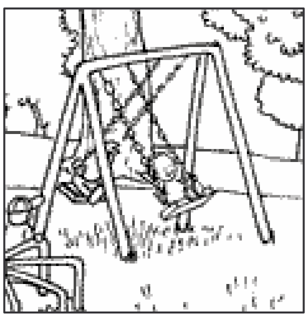
(3) on lâche le solide accroché à un câble faisant un angle de 60° par rapport à la verticale.

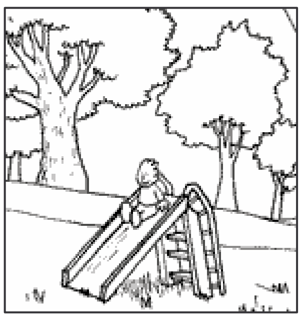
Solution :

Les trajets sont différents, mais dans les 3 cas le solide a un déplacement vertical de 1m, et le travail moteur à fournir vaut 500 x 1 = 500 J.



Exemples de mouvements guidés dans lesquels le poids fournit un travail :

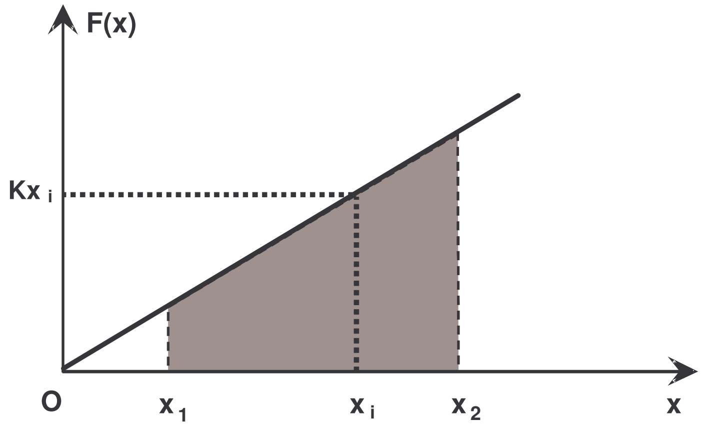




1.3-Travail d'une force de valeur non constante sur un déplacement rectiligne, le long de sa droite d'action

Exemple :

Pour allonger un ressort de raideur **K** d'une longueur x, il faut exercer une force de valeur **F(x) = Kx** dans la direction du ressort et dans le sens de l'allongement.



Représentons les variations F(x) de la valeur de la force en fonction de son abscisse x durant l'allongement.

Considérons, autour de l'allongement x_i, un déplacement dx suffisamment petit pour que la valeur de la force puisse être considérée comme constante et égale à $K x_i$. Le travail élémentaire dW fourni au cours du déplacement dx est :

dW = F(x).dx, qui est l'aire du rectangle de hauteur kx et de largeur dx.

Au cours du déplacement M_1M_2 , l'abscisse varie de x_1 à x_2, et le travail de la force a donc pour valeur la somme de tous ces travaux élémentaires, c'est-à-dire l'intégrale :

$$\mathbf{W = \int_{x_1}^{x_2} F(x).dx}$$

dont la valeur est l'aire de la surface comprise entre la courbe et l'axe des x.

Cette surface peut être considérée comme :

- la différence entre les aires des triangles de bases x_2 et x_1,
- ou, l'aire du trapèze rectangle situé sous la droite entre x_1 et x_2 :

$$W = \underbrace{\frac{x_2.kx_2}{2} - \frac{x_1.kx_1}{2}}_{\text{aires des triangles}} = k\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} = \underbrace{\frac{kx_1 + kx_2}{2}(x_2 - x_1)}_{\text{aire du trapèze}}.$$

Résultat que l'on retrouve par le calcul intégral :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} k\ x\,dx = k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = k\ \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}.$$

Exercice résolu

Énoncé :

Comparer le travail à fournir pour allonger de 10 cm un ressort de raideur 100N.m^{-1}

- ***à partir de sa longueur à vide***
- ***quand il est déjà allongé de 10cm***

Solution :

Dans les deux cas, $W = k\,\dfrac{x_2^2 - x_1^2}{2}$***, où*** x_1 ***et*** x_2 ***sont les allongements initial et final .***

Dans le premier cas :

$x_1 = 0$ ***et*** $x_2 = 0{,}1m$ ***d'où*** $W = 100 \times \dfrac{0{,}1^2}{2} = 0{,}5J.$

Dans le deuxième,

$x_1 = 0{,}1$ ***et*** $x_2 = 0{,}2m$ ***d'où*** $W = 100 \times \dfrac{0{,}2^2 - 0{,}1^2}{2} = 1{,}5J.$

On constate bien que la même variation de longueur entraînant un effort d'autant plus grand que l'allongement du ressort est grand, le travail est d'autant plus important.

2-Puissance :

C'est la grandeur qui relie travail et vitesse d'exécution. Plus l'exécution d'un travail est rapide, plus la puissance mise en jeu est grande.

2.1- Puissance moyenne

La puissance moyenne P d'une force effectuant un travail (exprimé en joules) pendant une durée Δt (exprimée en secondes) est donnée par la relation. :

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

L'unité de puissance dans le S.I. est le **watt** (W). Le watt est la puissance moyenne correspondant à un travail de valeur 1 joule effectué en 1 seconde.

Exercice résolu

Énoncé :

Comparer la puissance moyenne à fournir pour soulever de 10 m un solide de poids 500N :

(1) à l'aide d'une corde et d'une poulie, en 20 secondes

(2) à l'aide d'un treuil motorisé, en 4 secondes

Solution :

Le travail fourni a la même valeur dans les deux cas : $W = P\,h = 5.10^3 J$.

Comme la puissance moyenne est définie par : $P = \frac{W}{dt}$,

dans le premier cas, elle vaut : $P_1 = 5.10^3/20 = 250W$;

dans le deuxième : $P_2 = 5.10^3/4 = 1250W = 1{,}25\ kW$.

2.2- Puissance instantanée

Si la quantité de travail fournie par unité de temps varie, ou si la loi donnant la valeur du travail en fonction du temps est connue, on définit la puissance instantanée comme la dérivée du travail par rapport au temps.

$$p(t) = \frac{dW}{dt}$$

Exercice résolu n°1

Énoncé :

Calculer la puissance instantanée développée par une force de 200 N pour déplacer son point d'application à la vitesse de 2 $m.s^{-1}$ ***le long d'une droite faisant un angle de 60°.***

Solution :

Pour déplacer le point d'application de M_1 ***à*** M_2 ***sur la droite, il faut fournir un travail :*** $W = \vec{F}.\overrightarrow{M_1M_2} = F.M_1M_2.\cos 60°$.

Le point d'application de la force se déplace à la vitesse v définie par $\frac{M_1M_2}{dt}$.

D'où $P = \frac{W}{dt} = F.v.\cos 60°$ ***ou encore*** $. P = \vec{F}.\vec{v}$

Application numérique : $P = 200 \times 2 \times 0{,}5 = 200W$.

Exercice résolu n°2

Énoncé :

Calculer la puissance instantanée à fournir pour allonger un ressort de raideur $100\ N.m^{-1}$ de 1cm par seconde à partir de sa longueur au repos.

Solution :

Pour allonger le ressort, il faut exercer une force ayant la même direction et le même sens que l'allongement.

Le travail fourni pour allonger le ressort de dx est donc $dW = F(x).dx$.

Comme $F(x) = k.x \quad dW(x) = k\ x\ dx$.

L'allongement du ressort est proportionnel à la durée : $x(t) = v\ t$.

Donc : $dW(t) = k\ v\ t\ dt = k\ v^2.t.dt$.

D'où la puissance à exercer : $P(t) = \dfrac{dW}{dt} = k\ v^2\ t = 100.(10^{-2})^2\ t = 10^{-2}\ t$,

avec P en watts si t en secondes.

La puissance instantanée à fournir pour allonger le ressort augmente linéairement dans le temps.